Physique Générale : Mécanique

06.01: Travail, puissance, énergie, équilibre et stabilité

Sections SC, GC & SIE , BA1

Version du 6.11.2024

Dr. J.-P. Hogge

Swiss Plasma Center

École polytechnique fédérale de Lausanne

Faculté des sciences de base

Swiss Plasma Center

Aujourd'hui

- Puissance instantanée développée par une force
- Travail d'une force
- Energie cinétique
- Théorème de l'énergie cinétique
- Potentiel
- Force conservative
- Energie potentielle, energie mécanique
- Conservation de l'énergie mécanique
- Exemple: Pendule mathématique, portrait de phase

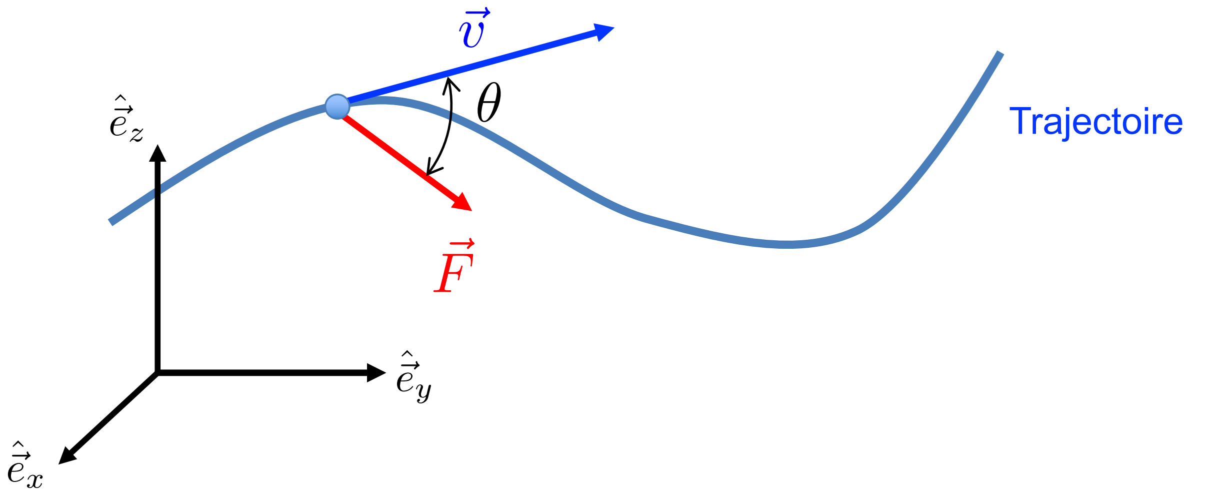
Puissance instantanée d'une force

[mooc 10.1]

Définition: Puissance instantanée
La puissance instantanée d'une force **F** agissant sur un point matériel P de masse m et de vitesse **v** est définie par:

$$P(t) = \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t) = |F|\,|v|\,\cos\theta$$

Unités: La puissance s'exprime en watts $[\mathrm{kg\ m^2/s^3}], [\mathrm{N\ m/s}], [\mathrm{W}]$

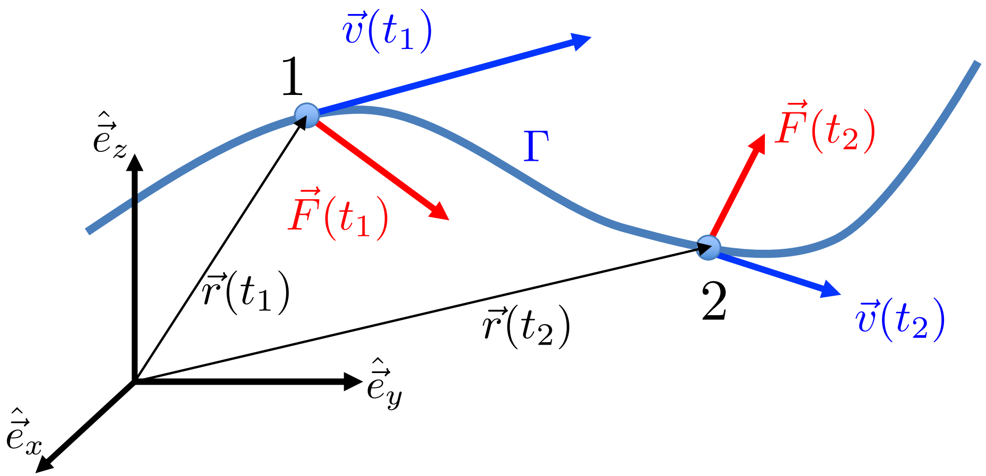


Faculté des sciences de base
Swiss Plasma Center

Définition: Travail d’une force

Le travail effectué par une force **F** agissant sur un point matériel P de masse m et de vitesse **v** entre les temps t_1 et t_2 est définie par l’intégrale temporelle de la puissance instantanée:

$$W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} P(t)\, dt$$



Unités:
le joule

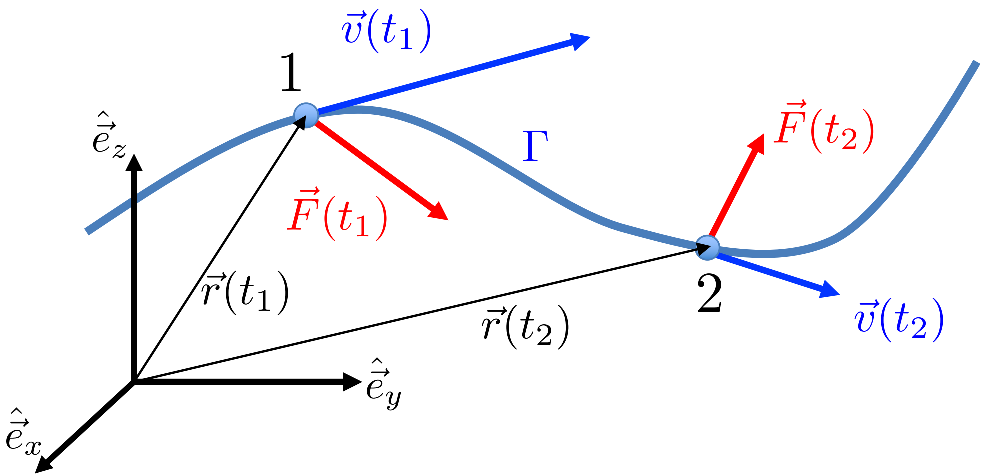
$[\mathrm{kg\ m^2/s^2}], [\mathrm{N\ m}], [\mathrm{J}]$

Faculté des sciences de base

Swiss Plasma Center

En reprenant la définition de la puissance instantanée:

$$W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} P(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\cdot\vec{v}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\,dt = \int_{\Gamma} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$



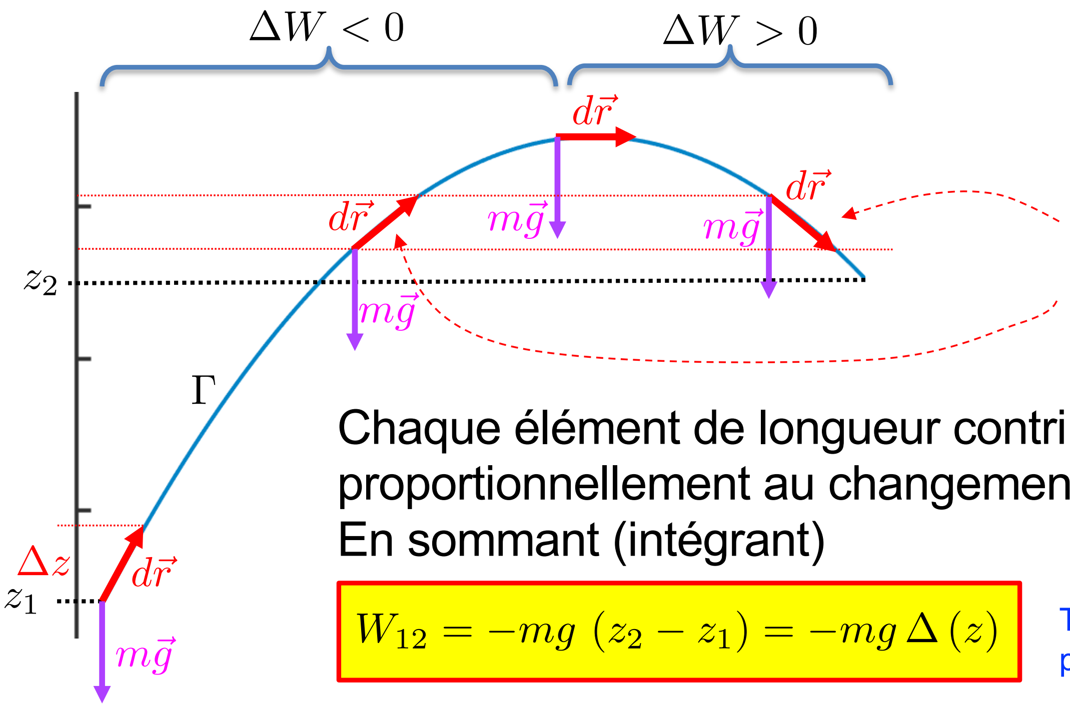
Cette formule est générale et est indépendante de la forme de **F**:

$$\vec{F} = F\,\hat{\vec{i}}$$
$$\vec{F} = \vec{F}\big(\vec{x}(t)\big)$$
$$\vec{F} = \vec{F}\big(\vec{v}(t)\big)$$

Le travail de la force ne dépend pas du repère, mais dépend du référentiel.

Travail d'une force: exemples

- Travail de la force de gravitation pendant un tir balistique.
  Pas de frottement, la force de gravitation est supposée constante.



$$\Delta W = m\vec{g} \cdot d\vec{r} = -mg\,\Delta z$$

Chaque élément de longueur contribue au travail proportionnellement au changement de hauteur associé. En sommant (intégrant)

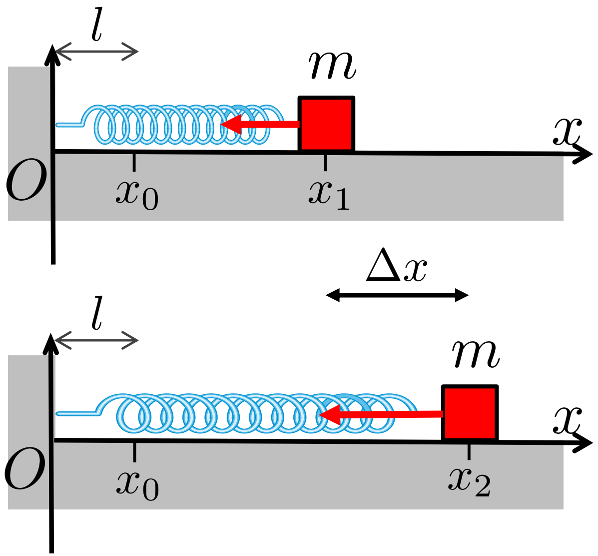
$$\boxed{W_{12} = -mg\,(z_2 - z_1) = -mg\,\Delta(z)}$$

Travail de la force de pesanteur

Le travail de la force de gravitation ne dépend que de la différence d'altitude. Pas de la trajectoire!

Travail d'une force: exemples

Travail de la force de rappel d'un ressort. (Pas de frottement)



$$\vec{F}_1 = -k(x_1 - x_0)\,\hat{\vec{e}}_x \qquad \vec{F}_2 = -k(x_2 - x_0)\,\hat{\vec{e}}_x$$

Erreur courante:

On se dit $F = -kx$, puis $W = Fx$, et on conclut:

$$W = -kx^2 \quad \Longrightarrow \quad W_{12} = -k(x_2 - x_1)^2$$

Faux !

Méthode correcte:

Il faut explicitement tenir compte du fait que la force dépend de la position!

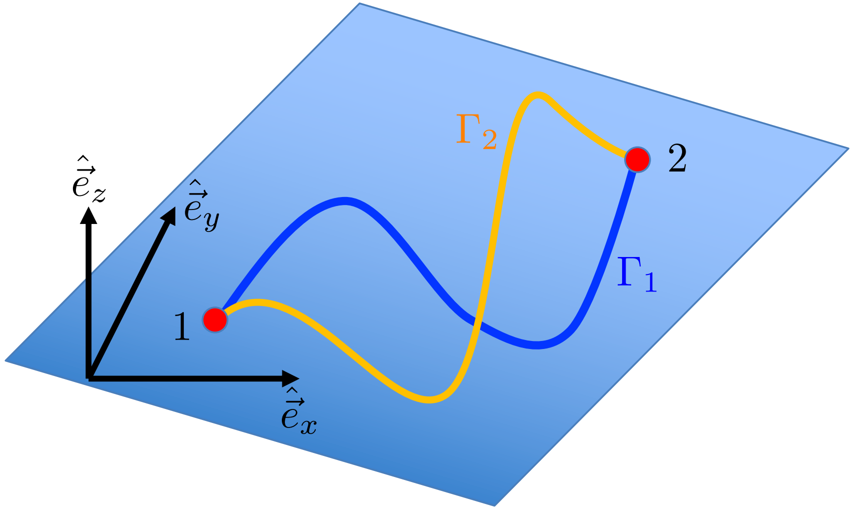
$$W_{12} = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx = -k\int_{x_1}^{x_2}(x - x_0)\,dx = -\frac{k}{2}(x - x_0)^2\Big|_{x_1}^{x_2} = -\frac{k}{2}\Big[\underbrace{(x_2 - x_0)^2}_{\text{Pour aller de la position de repos à } x_2} - \underbrace{(x_1 - x_0)^2}_{\text{Pour aller de la position de repos à } x_1}\Big]$$

Correct

Le travail de la force de rappel dépend que des positions finale et initiale par rapport à la position de repos!

Travail des forces de frottement.

- Frottements statiques: ne travaillent pas (pas de mouvement)
- Frottements dynamiques:



Pour chaque élément de trajet dr

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\mu_c \, |N| \, dr$$

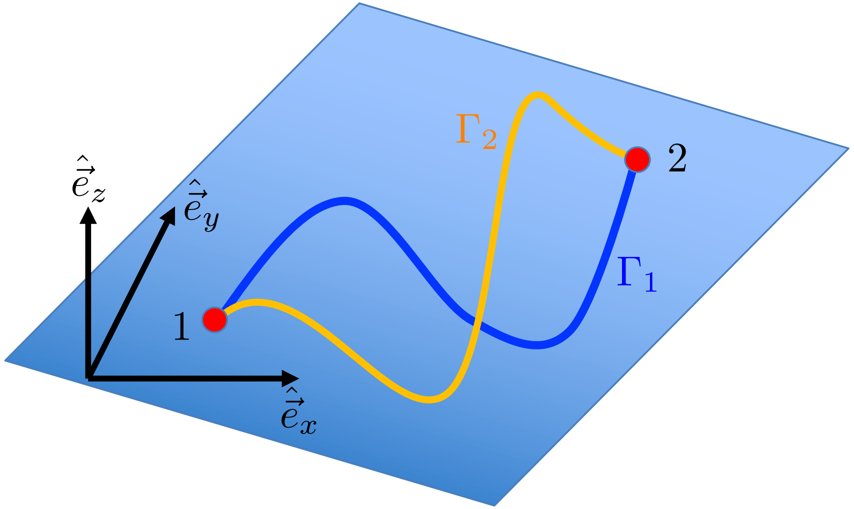
$$W_{12} = \int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\mu_c \, |N| \int_\Gamma dr = \mu_c \, |N| \, L$$

L : longueur du trajet de 1 à 2

Le travail de la force de frottement dynamique dépend de la trajectoire !

Travail des forces de frottement visqueux.

- Modèle de force: $\vec{F} = -b\vec{v}$



Pour chaque élément de trajet dr

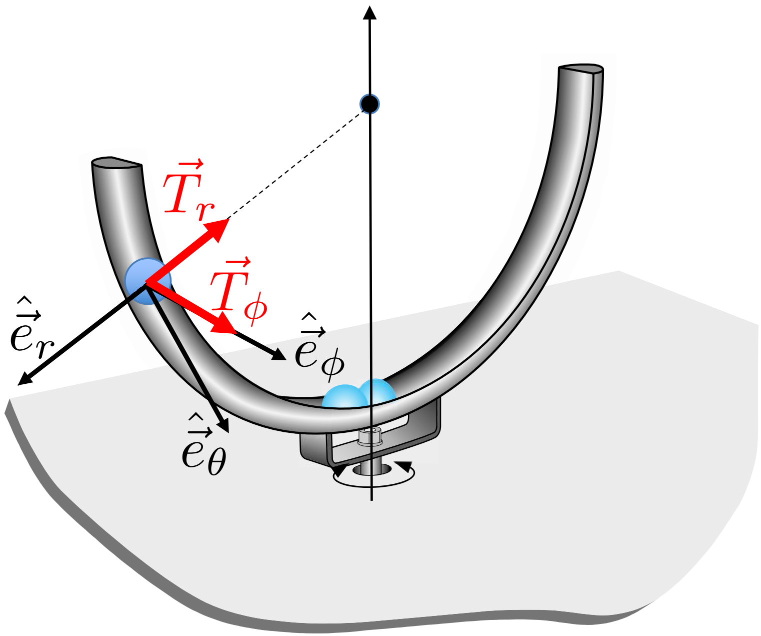
$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -b\, v\, dr$$

$$W_{12} = \int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = -b \int_\Gamma \underbrace{v}_{v(\vec{r}(t))}\, dr = \ldots$$

Le travail des forces de frottement visqueux dépendent de la trajectoire et de l'équation horaire !

Travail d’une force: exemples

- Forces de contraintes (bille dans une glissière)



Les forces de contraintes (**T**$_r$,**T**$_\phi$)…

- … ne travaillent pas (**T**$_r$ · **v** = 0),
- ... ou travaillent (**T**$_\phi$ · **v** ≠ 0).

Motivation: On cherche une grandeur scalaire qui permet de mesurer l'effet du travail sur un point matériel.

Considérons un cas académique simple: MRUA d'un point matériel de masse m soumis à une force F_x constante.
On a vu:

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{x0} + a_x\,(t-t_0) \\ x(t) = x_0 + v_{x0}\,(t-t_0) + \frac{1}{2}a_x\,(t-t_0)^2 \end{cases} \Longrightarrow \quad (t-t_0) = \frac{(v_x - v_{x0})}{a_x}$$

$$\Longrightarrow \quad x(t) - x_0 = \frac{v_{x0}(v_x - v_{x0})}{a_x} + \frac{1}{2}a_x\frac{(v_x^2 - 2v_xv_{x0} + v_{x0}^2)}{a_x^2} = \frac{v_x^2 - v_{x0}^2}{2a_x}$$

$$\Longrightarrow \quad v_x^2 - v_{x0}^2 = 2\underbrace{a_x}_{F_x/m}(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_x^2 - \frac{1}{2}mv_{x0}^2 = \underbrace{F_x(x-x_0)}_{\text{Travail de la force } F_x}$$

Le travail de la force se traduit par une variation de la grandeur $\frac{1}{2}mv_x^2$

<u>Définition:</u> **Energie cinétique**
L'énergie cinétique d'un point matériel P de masse m et de vitesse v (scalaire) est définie par:

$$E_{\mathrm{cin}} = T = \frac{1}{2} m v^2$$

Unités: $[\mathrm{kg\ m^2/s^2}], [\mathrm{N\ m}], [\mathrm{J}]$

- Remarques:
  - L'énergie cinétique dépend du référentiel.
  - Le travail n'est pas une fonction de l'état du système, il se définit uniquement par des échanges d'énergie.
  - Le travail d'une force caractérise la **capacité de celle-ci à changer l'énergie cinétique du système**
  - L'énergie cinétique est une grandeur extensive

Théorème de l'énergie cinétique

Découle naturellement de notre définition.
On considère un point matériel de masse m, soumis à l'action d'une force **F**, et qui évolue de **r**(t_1) à **r**(t_2).

*La variation de l'énergie cinétique du point matériel entre de **r**(t_1) et **r**(t_2) est égale au travail de la force **F**.*

Démonstration:

$$
\begin{aligned}
W_{12} &= \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\cdot\vec{v}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}(\vec{v}\cdot\vec{v})\right)\,dt = \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right)\,dt = \int_{v(t_1)=v_1}^{v(t_2)=v_2} d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \frac{1}{2}mv^2\Big|_{v_1}^{v_2} = \\
&= \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \Delta E_{\mathrm{cin}}
\end{aligned}
$$

Théorème de l'énergie cinétique

- Remarques:
  - Les forces étant des grandeurs extensives, si plusieurs forces agissent sur le point matériel, il suffit de sommer les travaux effectués par chacune d'elles pour déterminer la variation de l'énergie cinétique.
  - L'énergie étant extensive, le théorème est aussi valable pour un système de points matériels.
  - Dans ce cas, il faut considérer **toutes** les forces, **intérieures et extérieures** au système.

- Formulation alternative du théorème:

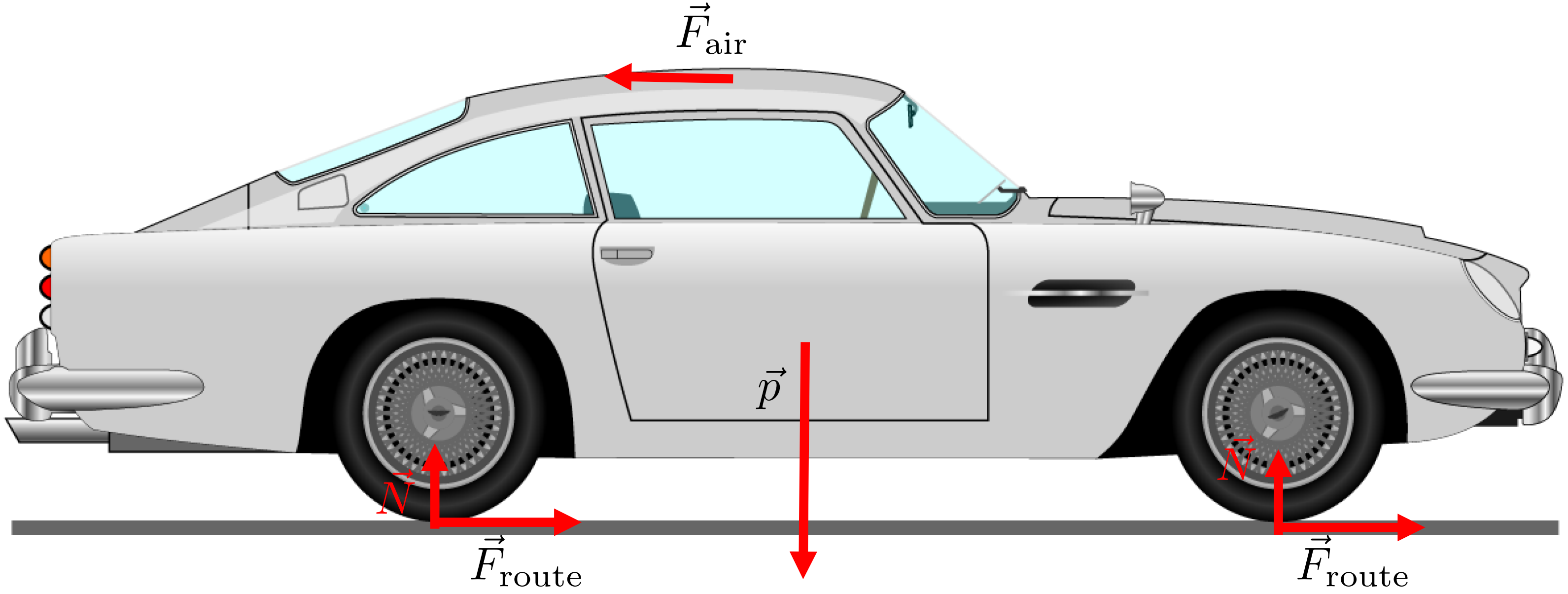
*La variation de l'énergie cinétique d'un système de points matériels est égale à la somme des travaux effectués par **toutes** les forces intérieures et extérieures.*

$$\Delta E_{\text{cin}} = \sum_{\forall \vec{F}} W^{\vec{F}}$$

Faculté des sciences de base

Swiss Plasma Center

Illustration que les forces intérieures peuvent être responsables de la variation d'énergie

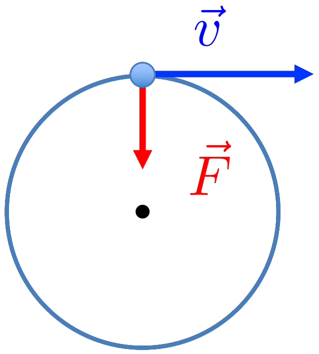


Forces extérieures:
- Poids (W=0)
- Support du sol (W=0)
- Frottement de l'air (W<0)
- Réaction de la route (W=0)

Forces intérieures:
- Force générée par le moteur (W>0)

La force responsable du mouvement ($\vec{F}_{\text{route}}$) ne travaille pas. La variation d'énergie cinétique est essentiellement due au travail des forces intérieures.

- Mouvement circulaire uniforme:

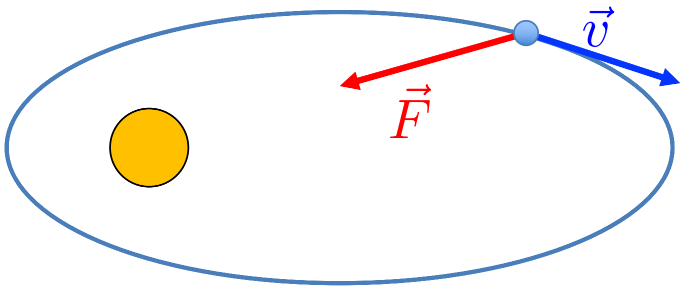


La force centripète ….

…. ne travaille pas car $\vec{F} \perp \vec{v}$

L'énergie cinétique est constante.
Exemple: Particule chargée dans un champ magnétique

- Mouvement d'une planète autour du soleil



La trajectoire est une ellipse dont le soleil est l'un des foyers. La force gravitationnelle ….

…. travaille. La vitesse et l'énergie cinétique varient.

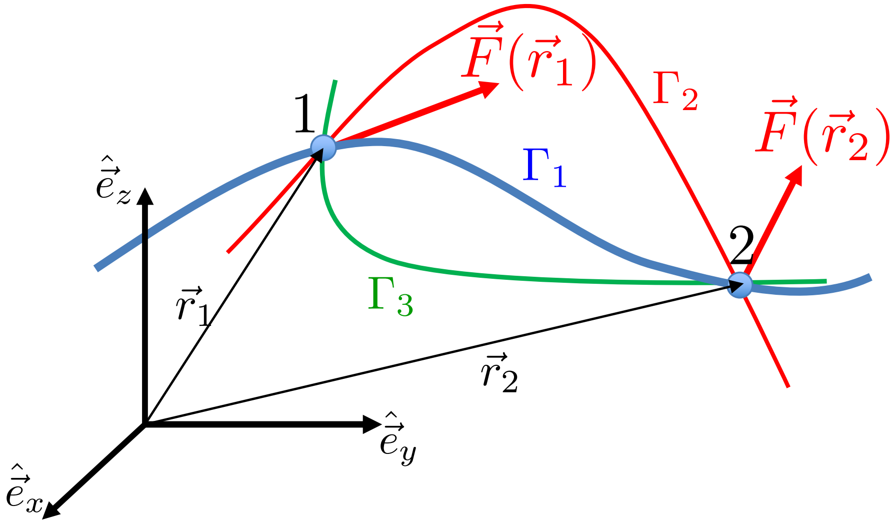
- Collisions inélastiques

Lors de chocs inélastiques, les forces internes qui entraînent la déformation de l'objet…

…. travaillent. La quantité de mouvement totale est conservée (pas de forces extérieures), mais une fraction de l'énergie cinétique est dissipée sous forme de chaleur.

Nous avons vu que **le travail de certaines forces (gravitation, force de rappel d'un ressort) ne dépend que des états initial et final**, et pas de la trajectoire pour aller de l'un à l'autre.

Dans ce cas on peut écrire:
$$W_{12} = \int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2)$$

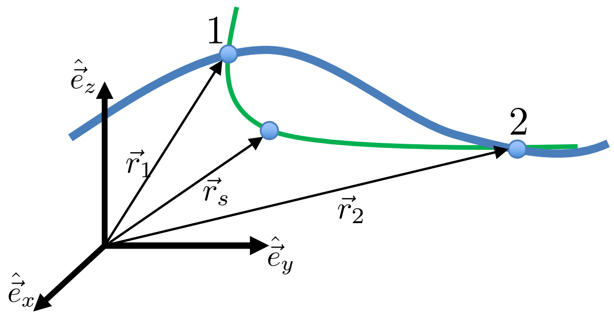


Définition: Potentiel
Si le travail d'une force ne dépend que des positions initiale et finale, alors on définit le potentiel associé par:

$$V(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_s} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

où $\vec{r}_s$ est une position de référence telle que $V(\vec{r}_s) = 0$

$$V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_s} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}_s}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



Unités: $[\mathrm{kg\ m^2/s^2}], [\mathrm{N\ m}], [\mathrm{J}]$

Relation entre potentiel et force

Propriété:
Une force $\vec{F}(x,y,z)$ dérive d'un potentiel $V(x,y,z)$ si:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(x,y,z) = -\nabla V(x,y,z) = -\vec{\text{grad}}\, V(x,y,z) = -\begin{pmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial x} \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} \\ \dfrac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}$$

<u>Note:</u> Dans le mooc, le repère est noté $\left(O, \hat{\vec{e}}_1, \hat{\vec{e}}_2, \hat{\vec{e}}_3\right)$ et $V = V(x_1, x_2, x_3)$
Ce qui permet d'écrire:

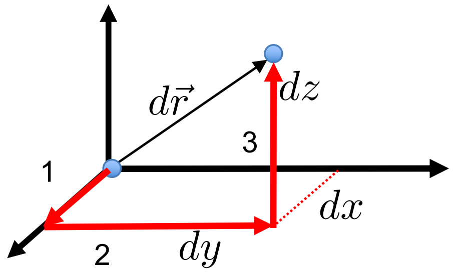
$$\vec{F} = -\sum_{i=1,3} \frac{\partial V}{\partial x_i}\, \hat{\vec{e}}_i$$

qui est entièrement équivalent à la notation adoptée ici:

$$\vec{F} = -\frac{\partial V}{\partial x}\, \vec{e}_x - \frac{\partial V}{\partial y}\, \vec{e}_y - \frac{\partial V}{\partial z}\, \vec{e}_z$$

<u>Démonstration:</u>

Nous calculons le travail de la force $\vec{F}(x,y,z) = (F_x, F_y, F_z)$ qui ne depend que des positions initiale et finale pour d'un déplacement infinitésimal $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$ et nous en tirons qu'elle dérive d'un potentiel $V(x,y,z)$



Le travail de dépend que des positions initiale et finale

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = -\left(V(\vec{r} + d\vec{r}) - V(\vec{r})\right)$$

On choisit prendre le chemin 1-2-3 pour aller de r à r+dr

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = \sum_{i=1,3} \vec{F} \cdot d\vec{r}_i = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ dy \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ dz \end{pmatrix}$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

sur le chemin 1:

$$F_x dx = -\left(V(x + dx, y, z) - V(x,y,z)\right) = -\frac{\partial V}{\partial x} dx$$

et donc:

$$(F_x, F_y, F_z) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right) = -\nabla V(x,y,z)$$

Intermède sur le gradient et la relation entre potentiel et force

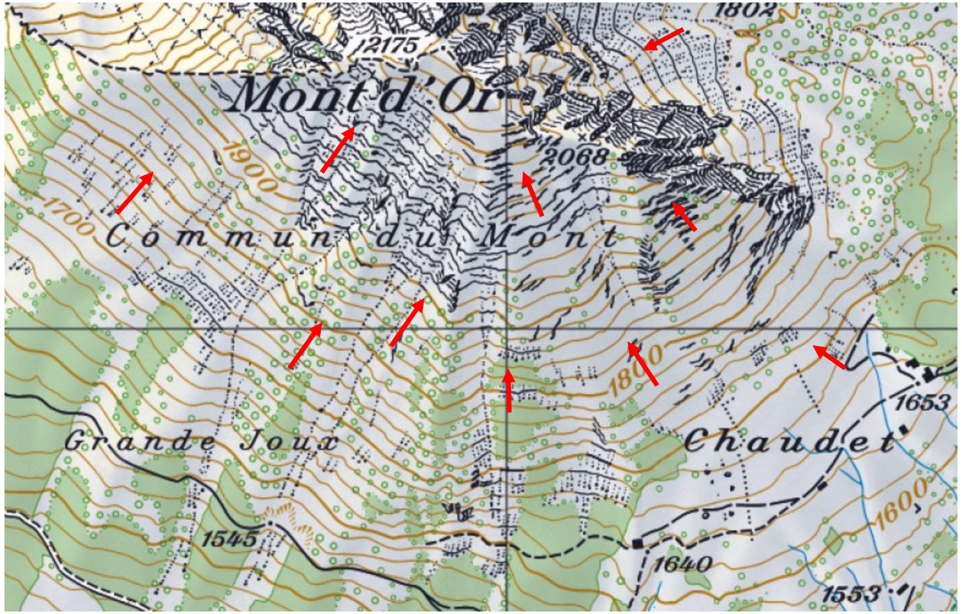
On considère la fonction *altitude(longitude, latitude) = a(x,y).* On représente des courbes de niveau (isoplèthes) en imaginant un marcheur qui en suit une. Il suit donc un parcours tel que

$$a\left(x(t), y(t)\right) = a_0$$

En dérivant par rapport au temps, il vient:

$$\frac{da}{dt} = \frac{\partial a}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial a}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} \\ \frac{\partial a}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \nabla a \cdot \vec{v} = 0$$



Comme v est tangente à la trajectoire, le gradient est perpendiculaire aux courbes de niveau. Il est dans la direction de la pente la plus forte.

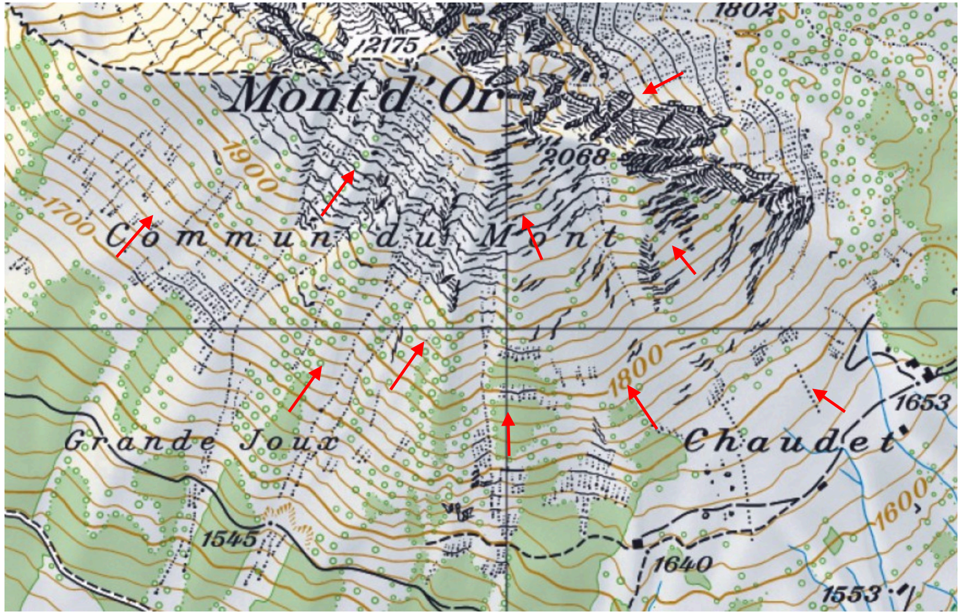
On note aussi que le vecteur gradient est orienté des basses vers les hautes altitudes.

Intermède sur le gradient et la relation entre potentiel et force

Imaginons maintenant que le promeneur perd sa boule de pétanque.

Cette dernière va subir une force parallèle à la direction de la pente la plus forte, dirigée vers le bas.

$$\vec{F} \parallel -\nabla a(x, y)$$



Faculté des sciences de base

Swiss Plasma Center

Force conservative

<u>Définitions:</u> **Force conservative, non conservative**.
Une force qui dérive d'un potentiel est dite **conservative**. Par opposition, une force qui ne dérive pas d'un potentiel est dite **non-conservative.**

	Force	Potentiel	
Pesanteur	$-mg\vec{e}_z$	mgz	Conservative
Gravitation	$-\frac{mMG}{\lvert\vec{r}\rvert^2}\frac{\vec{r}}{\lvert\vec{r}\rvert}$	$-\frac{mMG}{\lvert\vec{r}\rvert}$	Conservative
Ressort	$-k(x-l)\,\vec{e}_x$	$\frac{1}{2}k(x-l)^2$	Conservative
Frottement dynamique, visqueux	$-\mu_c\lvert N\rvert\frac{\vec{v}}{\lvert\vec{v}\rvert}, \quad -b\vec{v}$	NA	Non conservative
Force de déformation	?	NA	Non conservative

EPFL

Energie potentielle, énergie mécanique

Définition: Energie potentielle

Somme des potentiels associés aux forces conservatives agissant sur un système.

$$E_{\mathrm{pot}}(\vec{r}) = V(\vec{r}) = \sum_i V_i(\vec{r}) \quad , \quad \vec{F}_i(\vec{r}) = -\nabla V_i(\vec{r})$$

Unités: $[\mathrm{kg\ m^2/s^2}], [\mathrm{N\ m}], [\mathrm{J}]$

Définition: Energie mécanique

Somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle.

$$E_{\mathrm{mec}} = E_{\mathrm{cin}} + E_{\mathrm{pot}} = T + V$$

Unités: $[\mathrm{kg\ m^2/s^2}], [\mathrm{N\ m}], [\mathrm{J}]$

Conservation de l' énergie mécanique

<u>Propriété:</u> Si toutes les forces qui agissent sur un système sont conservatives, alors l' **énergie mécanique est constante.**

<u>Démonstration:</u>

On considère l'évolution d'un système où toutes les forces sont conservatives entre les états 1 et 2

$$W_{12} = \Delta E_{\text{cin}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Théorème de} \\ \text{l'énergie cinétique}}}{=} E_{\text{cin}}(2) - E_{\text{cin}}(1) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Forces conservatives}}}{=} E_{\text{pot}}(1) - E_{\text{pot}}(2)$$

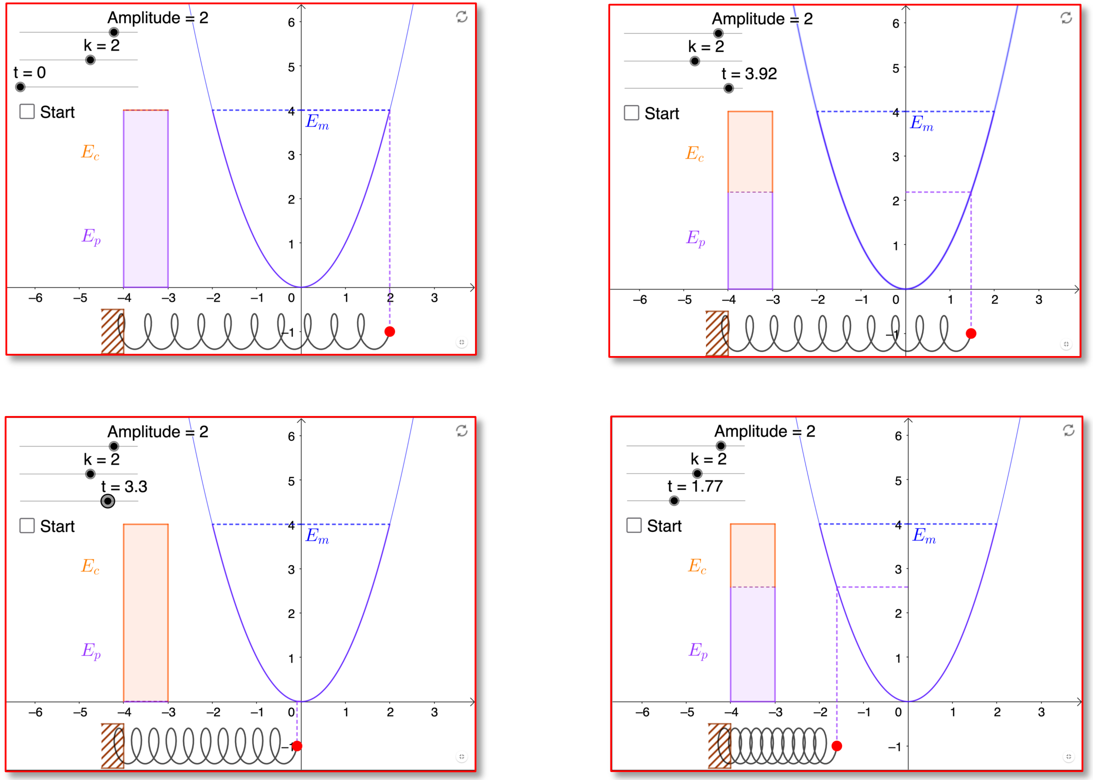
$$\Longrightarrow \quad E_{\text{cin}}(2) + E_{\text{pot}}(2) = E_{\text{cin}}(1) + E_{\text{pot}}(1) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{E_{\text{mec}}(2) = E_{\text{mec}}(1)}$$

<u>Corollaire:</u> Si des forces non-conservatives agissent sur un système, la variation de l'énergie mécanique correspond à leur travail.

$$\boxed{\Delta E_{\text{mec}} = W_{\text{nc}}}$$

W_{nc} : travail des forces non-conservatives

Exemple: ressort sur un plan sans frottement



L'énergie potentielle d'un ressort dont l'extrémité se trouve en x=0 à l'équilibre a la forme

$$E_{\mathrm{pot}} = \frac{1}{2}kx^2$$

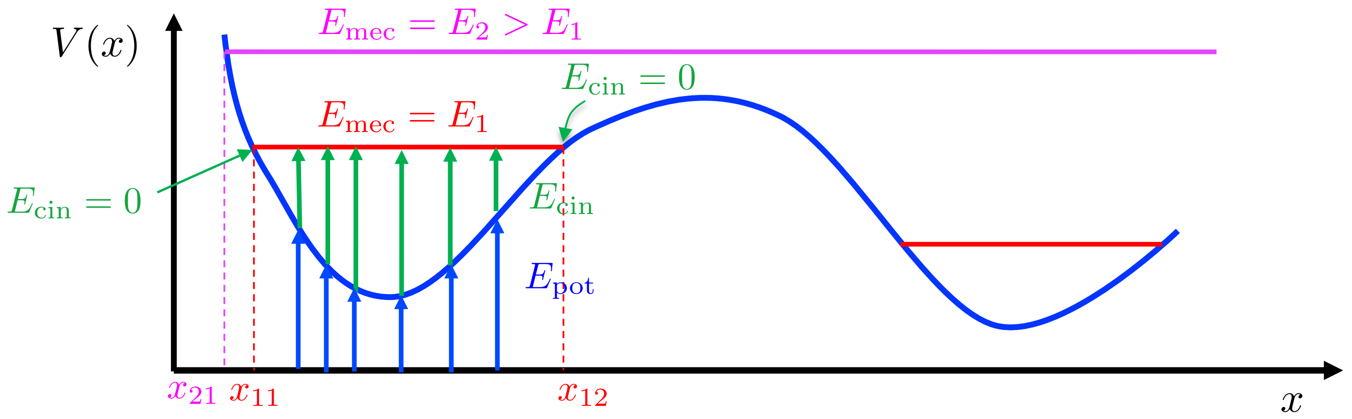
Pour une énergie mécanique donnée, le ressort oscille entre deux positions où l'énergie potentielle est égale à l'énergie mécanique et l'énergie cinétique nulle.

$$E_{\mathrm{mec}} = \frac{1}{2}kx^2_{\mathrm{max}}$$

De même l'énergie cinétique est maximale au minimum de l'énergie potentielle

Points d'équilibre et stabilité des équilibres sous l'angle de vue de l'énergie mécanique

On imagine un système soumis à des forces conservatives. On suppose pour simplifier qu'il a un seul degré de liberté, noté x. La représentation du potentiel V(x), couplée à la conservation de l'énergie mécanique, permet de tirer des informations sur la manière dont le système peut évoluer.



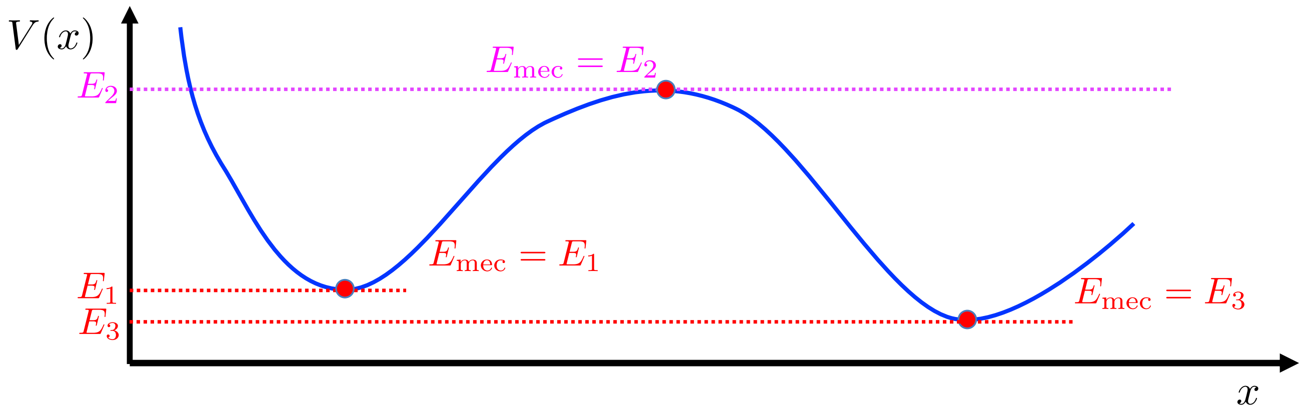
$E_{\mathrm{mec}} = E_1$ La course du point matériel est limitée par x_{11} et x_{12}, où l'énergie cinétique est nulle.

$E_{\mathrm{mec}} = E_2$ La course est limitée par x_{21} mais pas de limite pour les x grands.

Points d'équilibre et stabilité des équilibres sous l'angle de vue de l'énergie mécanique

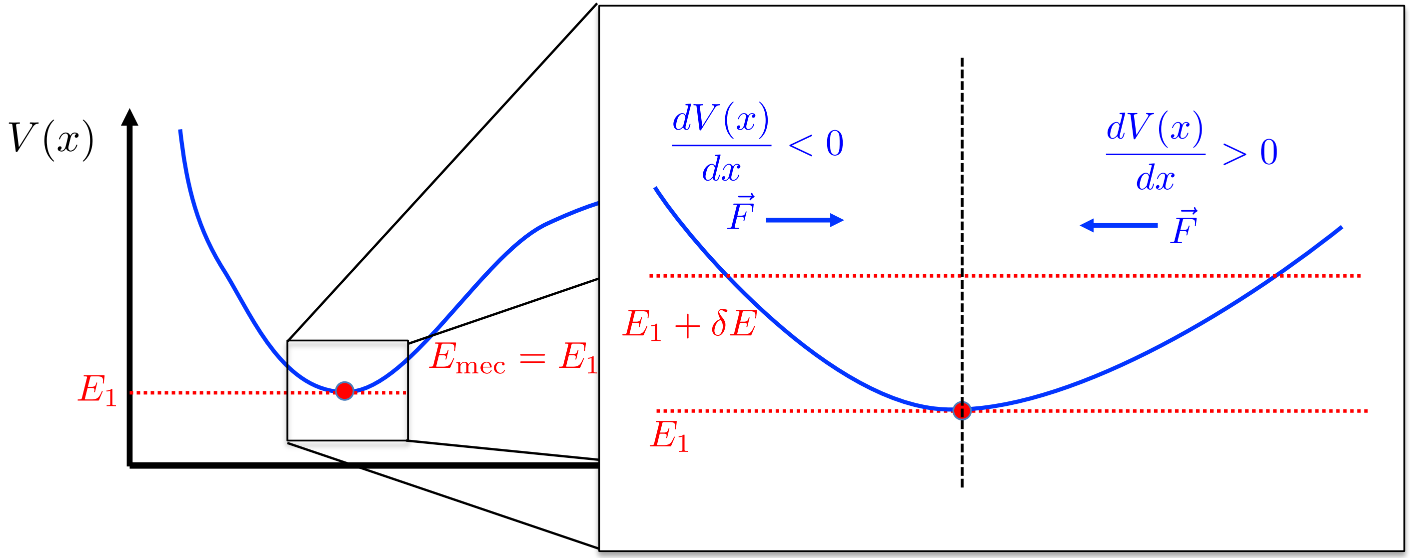
Les points d'équilibre sont donnés par:

$$\dot{x} = 0 \qquad\qquad m\ddot{x} = -\nabla V(x) = -\frac{dV}{dx} = 0$$



Points d'équilibre et stabilité des équilibres sous l'angle de vue de l'énergie mécanique

Intéressons-nous à ce qui se passe autour du point 1, si l'énergie mécanique est légèrement plus grande que E_1.

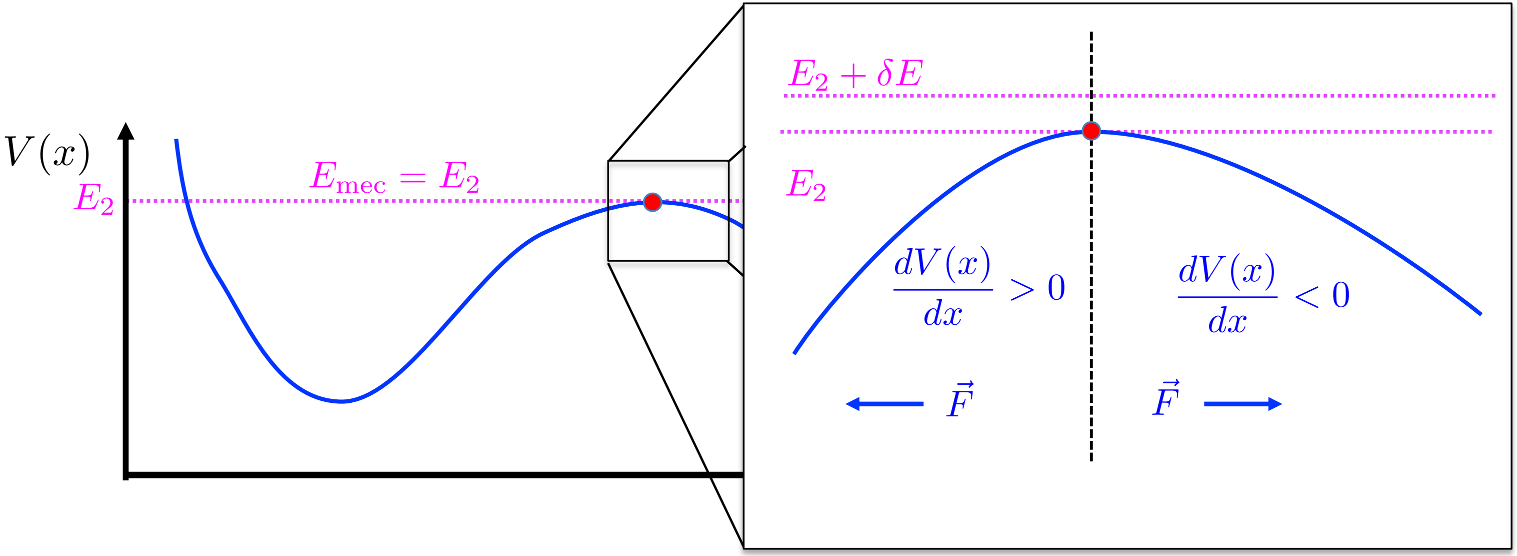


Si le point quitte la position d'équilibre, son énergie cinétique diminue et la force le ramène vers la position l'équilibre.

$$\frac{d^2V}{dx^2} > 0 \qquad \textbf{Equilibre stable}$$

Points d'équilibre et stabilité des équilibres sous l'angle de vue de l'énergie mécanique

Intéressons-nous à ce qui se passe autour du point 2, si l'énergie mécanique est légèrement plus grande que E_2.



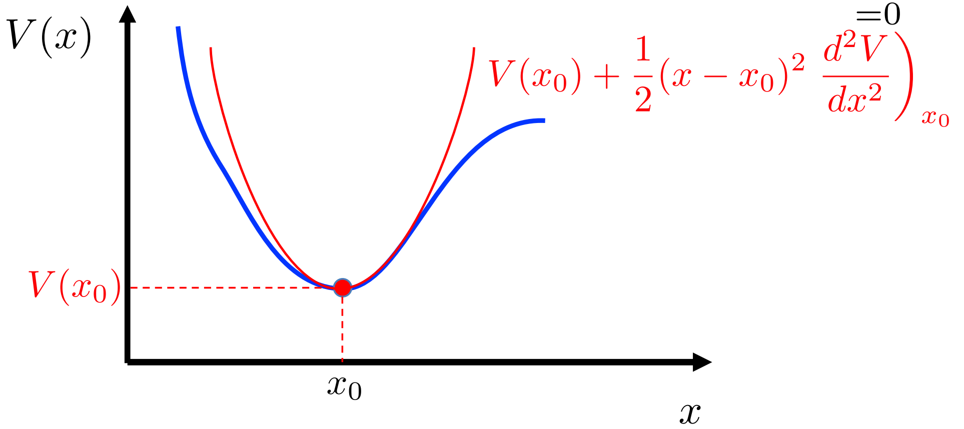
Si le point quitte la position d'équilibre, son énergie cinétique augmente et la force l'éloigne de la position l'équilibre.

$$\frac{d^2V}{dx^2} < 0 \qquad \textbf{Equilibre instable}$$

Points d'équilibre et stabilité des équilibres sous l'angle de vue de l'énergie mécanique

Au voisinage d'un point d'équilibre stable, on peut approximer le potentiel par une parabole en le développant au second ordre:

$$V(x) \simeq V(x_0) + (x - x_0) \underbrace{\left.\frac{dV}{dx}\right)_{x_0}}_{=0} + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 \underbrace{\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x_0}}_{>0} + \ldots$$



La courbe bleue est approximée au second ordre par la courbe rouge

L'approximation du gradient de potentiel s'obtient en dérivant:

$$\nabla V(x) = \frac{dV(x)}{dx} \simeq (x - x_0) \left.\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x_0}$$

Points d'équilibre et stabilité des équilibres sous l'angle de vue de l'énergie mécanique

L'équation de Newton approximée autour du point d'équilibre s'écrit donc

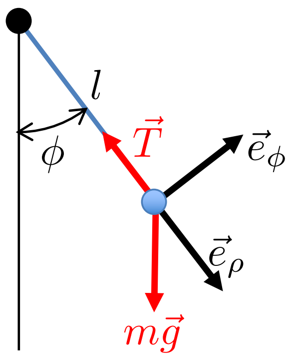
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{d^2(x-x_0)}{dt^2} = F(x) = -\nabla V(x) \simeq -(x-x_0)\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x_0}$$

D'où, si l'on pose: $\displaystyle \frac{1}{m}\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x_0} = \omega_0^2$

$$\boxed{\frac{d^2(x-x_0)}{dt^2} \simeq -\omega_0^2\,(x-x_0)}$$

Le mouvement au voisinage d'un point d'équilibre stable est en première approximation un oscillateur harmonique de pulsation proportionnelle à la dérivée seconde du potentie!

Exemple: Pendule mathématique



Coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z), $z = 0$, $\rho = \text{cste} = l$

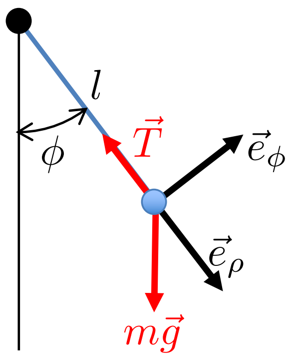
$$\vec{v} = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\,\vec{e}_\phi + \dot{z}\,\vec{e}_z = l\dot{\phi}\,\vec{e}_\phi$$

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\,\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\,\vec{e}_\phi + \ddot{z}\,\vec{e}_z = -\rho\dot{\phi}^2\,\vec{e}_\rho + \rho\ddot{\phi}\,\vec{e}_\phi$$

- **Rappel: Méthode de Newton:** On projette les forces selon les deux axes.

$$\begin{cases} \text{Selon } \vec{e}_\rho \;:\; -ml\,\dot{\phi}^2 = mg\cos\phi - T \\ \text{Selon } \vec{e}_\phi \;:\; ml\,\ddot{\phi} = -mg\sin\phi \qquad \Longrightarrow \qquad l\ddot{\phi} = -g\sin\phi \end{cases}$$

Exemple: Pendule mathématique (2)



Methode de l'énergie mécanique:

Energie cinétique: $\frac{1}{2}m(l\dot{\phi})^2$

Energie potentielle: $-mg\,l\,\cos\phi$

Energie mécanique: $$\frac{1}{2}m(l\dot{\phi})^2 - mg\,l\,\cos\phi = \text{cste}$$

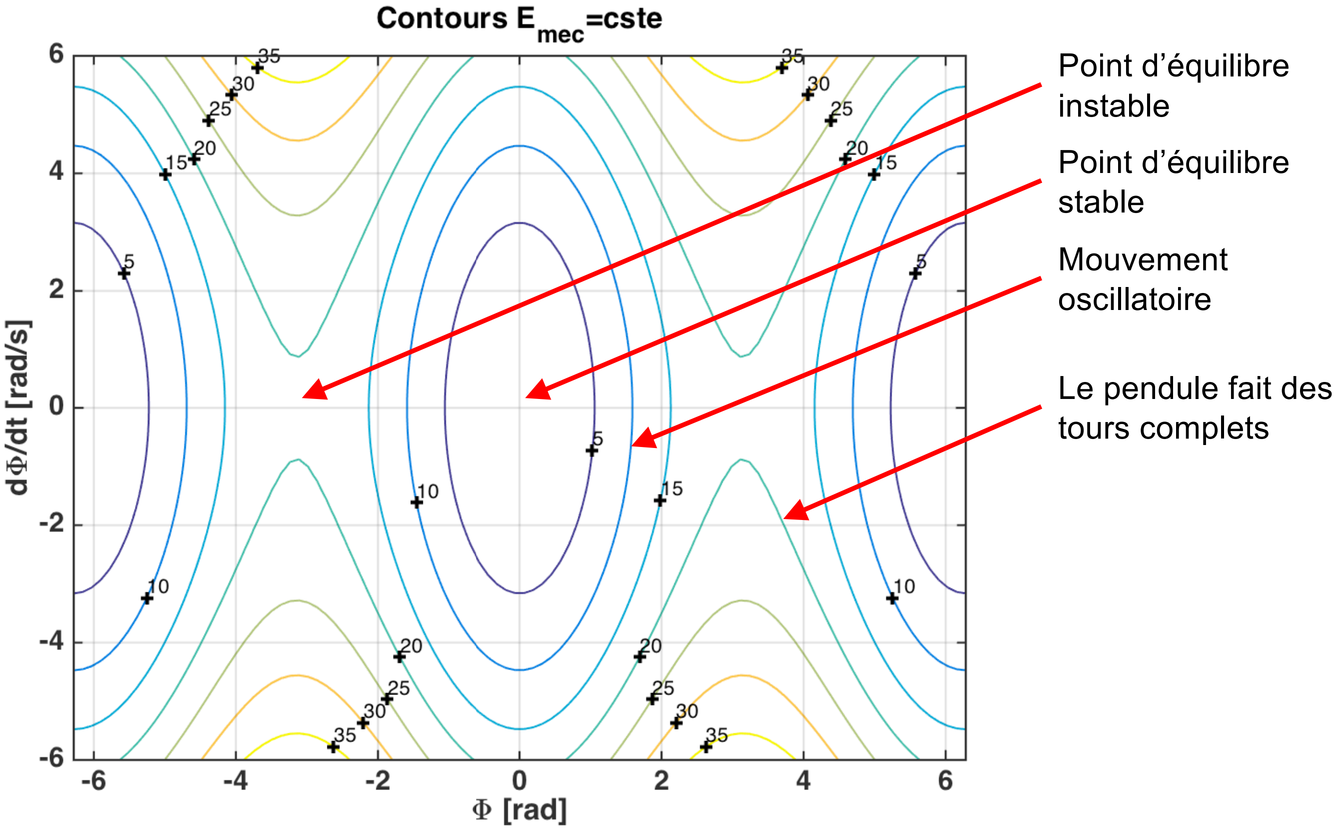
En dérivant l'expression de l'énergie mécanique par rapport au temps:

$$ml^2\dot{\phi}\,\ddot{\phi} + mg\,l\,\sin\phi\,\dot{\phi} = 0 \quad \Longrightarrow \quad l\,\ddot{\phi} = -g\,\sin\phi$$

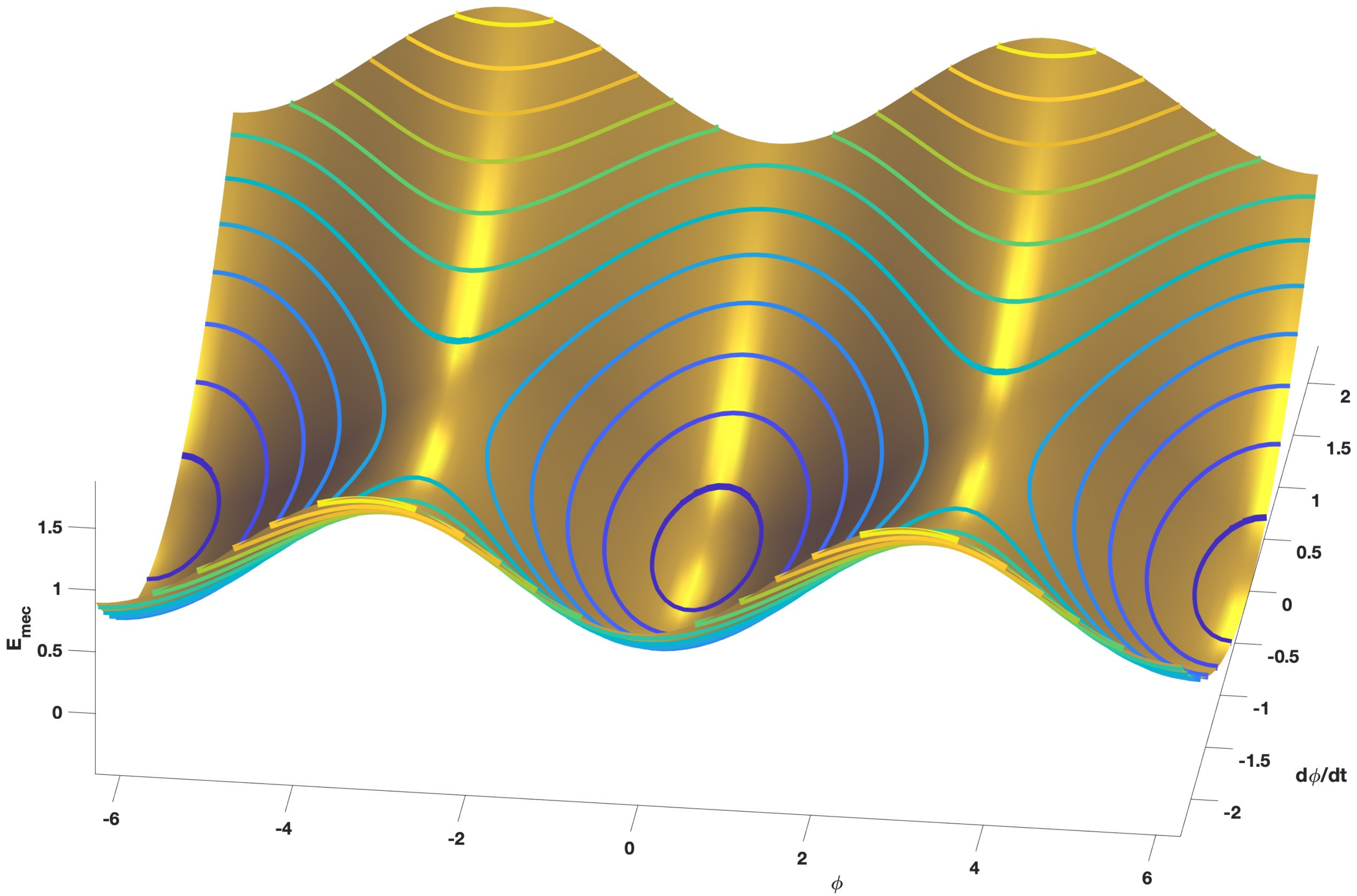
on retrouve l'équation déterminée à l'aide de la méthode de Newton.

Pendule mathématique: Portrait de phase

Les contours E_{mec}=cste permettent une visualisation des trajectoires dans l'espace de phase (ϕ, d ϕ /dt). L'évolution du système se fait sur les courbes E_{mec}=cste



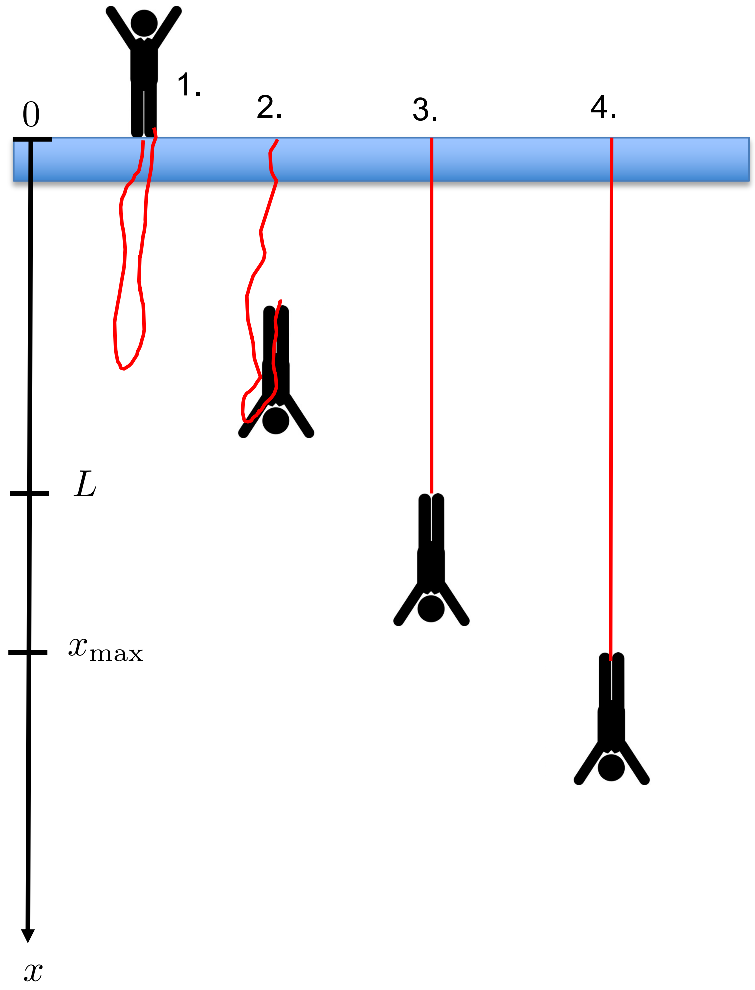
Pendule mathématique: Portrait de phase



Faculté des sciences de base

Swiss Plasma Center

Exemples additionnels: Saut à l'élastique

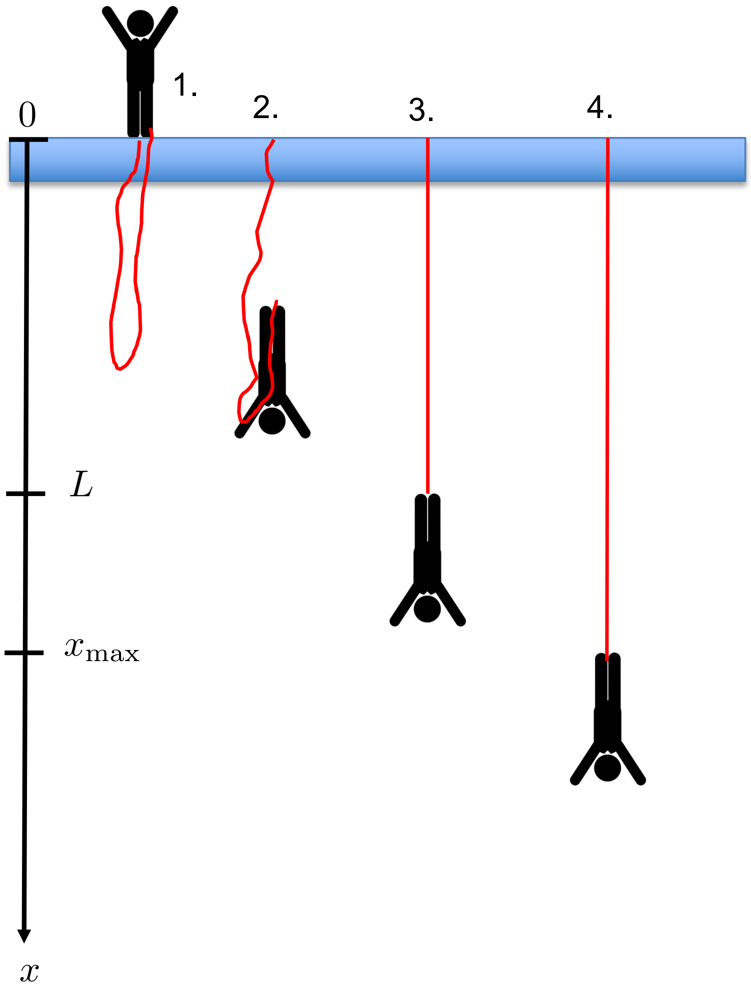


Il y a dans ce cas deux forces conservatives:

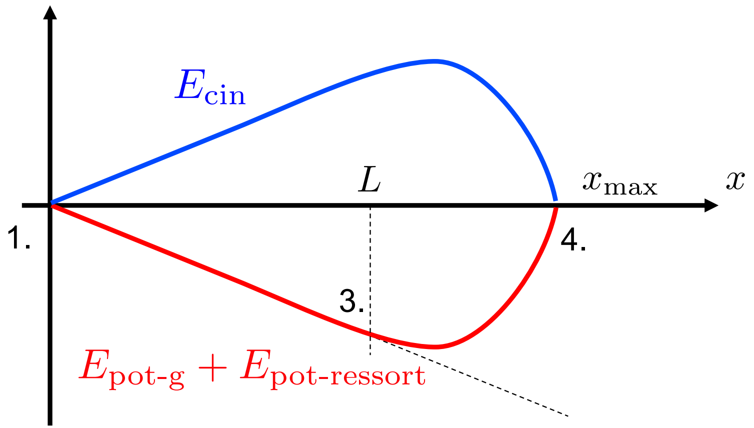
- la gravité,
- la force de rappel du ressort.

- En 1: E_{cin} = 0, $E_{pot\text{-}g}$ = 0, $E_{pot\text{-}ressort}$ = 0
- Entre 2 et 3: MRUA
- En 3:
  E_{cin}>0, $E_{pot\text{-}g}$ = -mgL, $E_{pot\text{-}ressort}$ = 0
- Entre 3 et 4:
  E_{cin} diminue, $E_{pot\text{-}g}$ = -mgx, $E_{pot\text{-}ressort}$ = ½ k (x-L)^2
- En 4:
  E_{cin} = 0, $E_{pot\text{-}g}$ = -mgx_{max}, $E_{pot\text{-}ressort}$ = ½ k (x_{max}-L)^2

Exemples additionnels: Saut à l'élastique

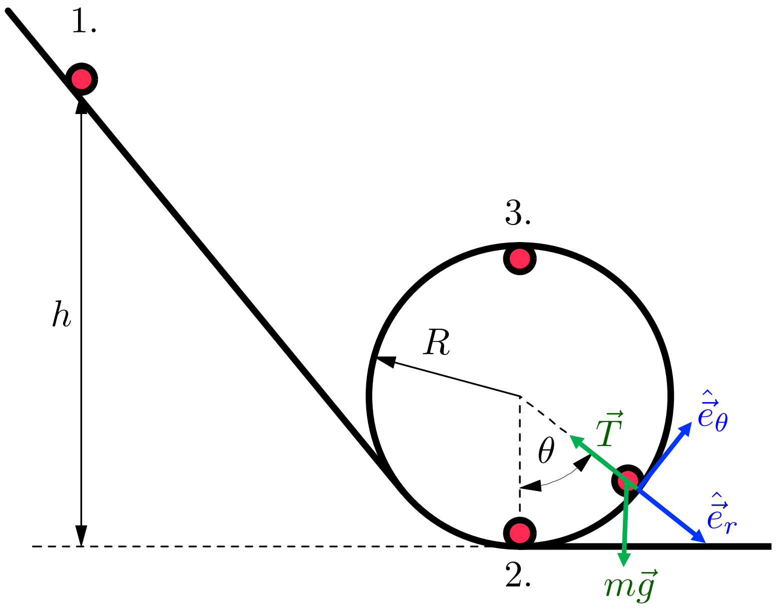


	E_{cin}	$E_{pot\text{-}g}$	$E_{pot\text{-}ressort}$
1	0	0	0
2-3	augmente	-mgx	0
3	> 0	-mgL	0
3-4	diminue	-mgx	½ k $(x-L)^2$
4	0	$-mgx_{max}$	½ k $(x_{max}-L)^2$



Exemples additionnels: Looping

Un point matériel P glisse sans frottement sur la rampe de lancement d'un looping de rayon R. Depuis quelle hauteur faut-il le lâcher (en supposant que sa vitesse intiale est nulle) pour être sûr qu'il ne décroche pas pendant le looping?



Pendant le looping:

$$m\vec{a}_P = m\vec{g} + \vec{T}$$

On projette sur r et θ et on utilise l'accélération en coordonnées polaires:

$$m\, a_\theta = m\left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right) = -mg\sin\theta$$

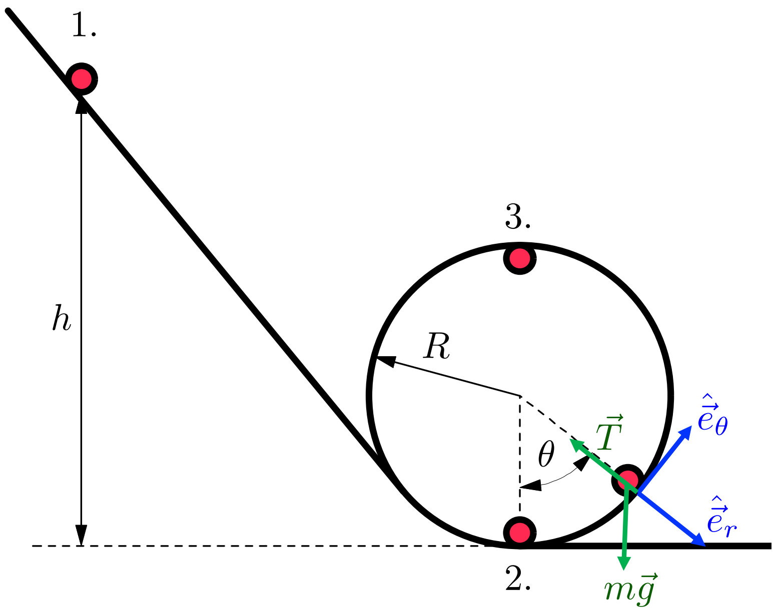
$$R\ddot{\theta} = -g\sin\theta$$

$$m\, a_r = m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = mg\cos\theta - T$$

$$-mR\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - T$$

Exemples additionnels: Looping

Conservation de l'énergie mécanique:



	E_{cin}	E_{pot}
1	0	mgh
2	$\frac{1}{2} m v_2^2$	0
3	$\frac{1}{2} m v_3^2$	2mgR

Conservation E_{mec} entre 1 et 3:

$$mgh = \frac{1}{2} m v_3^2 + 2mgR$$

$$v_3^2 = 2gh - 4gR$$

Newton selon $\mathbf{e}_r$ en $\theta = \pi$:

$$-mR\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - T$$

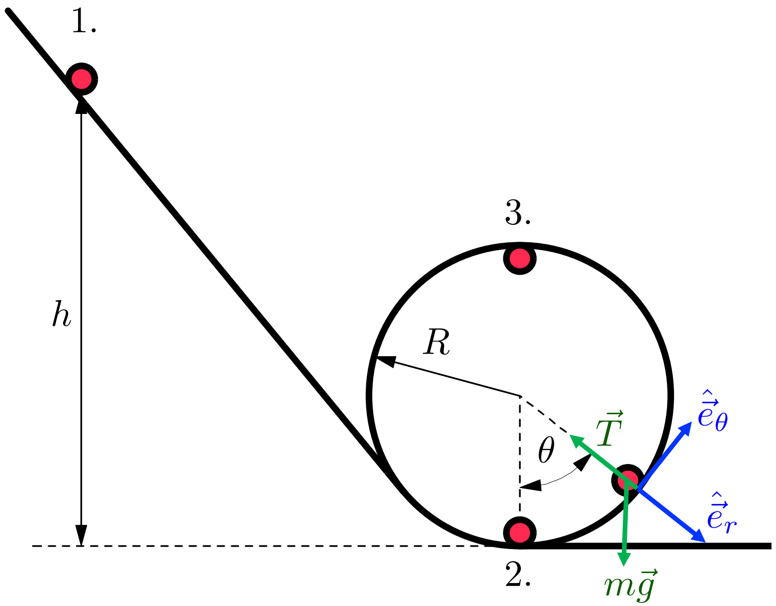
$$mR\,\dot{\theta}^2(\pi) = mg + T(\pi)$$

Exemples additionnels: Looping

Condition de non-décollement: $T(\pi) \geq 0$ $R\dot{\theta}^2(\pi) = g$

Relation entre v_3 et $\dot{\theta}$: $v_3 = R\dot{\theta}(\pi)$ $v_3^2 = R^2\dot{\theta}^2(\pi) = gR$

On remplace dans: $v_3^2 = 2gh - 4gR$



$$gR = 2gh - 4gR$$

D'où:

$$\boxed{h = 2.5R}$$

Dans la pratique il faut tenir compte du fait que la bille n'est pas un point matériel (une partie de l'énergie potetielle est convertie en énergie de rotation) et la depuis un peu plus haut.

EPFL

Résumé (1):

- **Puissance instantanée développée par une force:** $P(t) = \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t)$ $[\mathrm{kg\ m^2/s^3}], [\mathrm{N\ m/s}], [\mathrm{W}]$

- **Travail d'une force:** $W_{12} = \int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ $[\mathrm{kg\ m^2/s^2}], [\mathrm{N\ m}], [\mathrm{J}]$

  - **Travail de la force de pesanteur** $W_{12} = -mg\,(z_2 - z_1) = -mg\,\Delta\,(z)$

  - **Travail de la force de rappel d'un ressort**

$$W_{12} = -\frac{k}{2}\Delta\left((x - x_0)^2\right) = -\frac{k}{2}\left[(x_2 - x_0)^2 - (x_1 - x_0)^2\right]$$

- **Energie cinétique:** $E_{\mathrm{cin}} = T = \frac{1}{2}mv^2$ $[\mathrm{kg\ m^2/s^2}], [\mathrm{N\ m}], [\mathrm{J}]$

- **Théorème de l'énergie cinétique:** $W_{12} = \Delta E_{\mathrm{cin}}$

  W_{12}: travail de toutes les forces agissant sur le système (internes et externes)

Résumé (2):

- **Potentiel:**

$$V(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_s} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Valable si le travail de F ne dépend que des positions initiale et finale

$$\vec{F}(x, y, z) = -\nabla V(x, y, z)$$

  - Potentiel associé à la force de rappel d'un ressort $\frac{1}{2}k(x-l)^2$
  - Potentiel associé à la force de pesanteur: mgz

- **Force conservative:** Force qui dérive d'un potentiel

Résumé (3):

Energie potentielle:

$$E_{\text{pot}}(\vec{r}) = V(\vec{r}) = \sum_i V_i(\vec{r}) \quad , \quad \vec{F}_i(\vec{r}) = -\nabla V_i(\vec{r}) : \text{Forces conservatives}$$

Energie mécanique:

$$E_{\text{mec}} = E_{\text{cin}} + E_{\text{pot}} = T + V$$

Conservation de l'énergie mécanique:

$$E_{\text{mec}} = \text{Constante}$$

Valable si le toutes les forces qui agissent sur le système sont conservatives

Points d'équilibre:

$$\frac{dV}{dx} = 0$$

Stabilité:

$$\frac{d^2V}{dx^2}$$

>0 : Stable
<0 : Instable